VARIEDADES BANDEIRA E TEORIA DE REPRESENTAÇÕES

TIAGO MACEDO E LONARDO RABELO

Sumário

Introdução 1
1. Primeira aula 2
1.1. Álgebras de Lie: Definições básicas 2
1.2. Álgebras de Lie semissimples 4
1.3. Álgebras torais e decomposição de Cartan complexa 5
1.4. Decomposição de Cartan para álgebras reais 6
1.5. Representações de álgebras de Lie simples 8
2. Segunda aula 9
2.1. Variedades e Aplicações Diferenciáveis 9
2.2. Variedades Algébricas 10
2.3. Grupos de Lie 11
2.4. Espaço Tangente 13
2.5. Álgebras de Lie de grupos de Lie 14
3. Terceira aula 17
3.1. Exponenciação de Matrizes e ação de grupos 17
3.2. Variedades Projetivas 18
3.3. Teorema principal e generalizações 19
Referências 20

Introdução

A teoria de Lie, que engloba em particular as álgebras de Lie e os grupos de Lie, é uma teoria muito interessante e atraente. O interesse nessa teoria vem do fato de prover ferramentas para resolver problemas em diversas áreas como EDO, dinâmica, geometria estocástica, geometria algébrica, teoria de representações e combinatória. A atração vem da beleza escondida em técnicas nem sempre aparentes à primeira vista, como por exemplo os diagramas de Dynkin.

O interesse em grupos de Lie surgiu naturalmente dos estudos de S. Lie sobre simetrias de equações diferenciais. Em particular, o grupo de transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial complexo de dimensão finita é um grupo de Lie, denotado por GL_n. A geometria desses grupos, sendo uma de suas facetas mais importantes, é amplamente estudada. Essa geometria, no entanto é bastante intrincada. Sua estrutura intrincada motivou o estudo de certas aproximações lineares, as álgebras de Lie. Essas álgebras, por sua vez, apesar de admitirem desenvolvimento maior e mais rápido, também não são completamente compreendidas.

Uma das ferramentas para entender álgebras de Lie é a sua teoria de representações. As álgebras de Lie são espaços tangentes a grupos de Lie. Sua importância intuitiva é que esses espaços, que têm uma rica estrutura algébrica, são uma aproximação linear aos grupos de Lie. Desta forma, propriedades locais dos grupos de Lie podem ser obtidas através das álgebras de Lie associadas a eles. Além disso, por ser um espaço vetorial, as álgebras de Lie nos permitem estudar objetos não lineares, os grupos de Lie, usando ferramentas mais básicas, de álgebra linear.

A teoria de representações é notoriamente usada como ferramenta para estudar diversos objetos. Um exemplo deste fenômeno é o clássico Teorema de Cayley, apresentado no primeiro curso de teoria de grupos. Esse teorema afirma

Date: 10 de dezembro de 2012.

que todo grupo finito é isomorfo a um subgrupo do grupo de permutações em n letras, para um número natural n suficientemente grande (cf. [Her64, §9, Theorem 2.F]). Um outro exemplo desse fenômeno é a realização geométrica dos grupos de Coxeter, que afirma que todo grupo de Coxeter finito pode ser realizado como grupo de reflexões de algum espaço vetorial de dimensão finita (cf. [Hum90, Proposition 5.3]).

Uma das ferramentas usadas para entender os grupos de Lie são as variedades bandeira. Em particular, a indução de propriedades geométricas dessa variedade bandeira para o grupo de Lie é uma ferramenta muito usada para entender o grupo a partir da variedade. É interessante observar que variedades bandeira generalizam alguns exemplos de variedades muito conhecidos na matemática. O primeiro exemplo é o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 1)$, que é o espaço formado por subespaços lineares de dimensão 1 (retas) em um certo espaço vetorial de dimensão $n+1$. Outro exemplo é a variedade Grassmanniana $\mathrm{Gr}(k, n)$, $1 \leq k \leq n$, que é o espaço de subespaços k-dimensionais em um espaço vetorial n-dimensional.

Essas notas são baseadas em um curso dado na VI Bienal da SBM. O interesse em apresentar esse material veio do interesse dos autores em apresentar a conexão entre as teorias de álgebras e grupos de Lie sobre os corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ de maneira unificada e elementar (via exemplos). Além disso, não é de nosso conhecimento, até agora, nenhum texto que trate desse assunto usando a abordagem proposta aqui.

Apesar de tentador nós não iremos entrar em detalhes sobre dinâmica, variedades quiver, grupos quânticos ou propriedades (co)homológicas durante essas aulas. O nosso objetivo principal é a demonstração de um teorema que afirma que as variedades bandeira G/B são variedades projetivas. Isto será feito através da utilização da teoria de representações e se dá no contexto das variedades complexas. Um objetivo subjacente consiste em estabeler este resultado para as variedades bandeira reais o que se traduz em identificá-las a certas subvariedades do espaço projetivo. A passagem do contexto complexo para o real ilustra a mudança do ponto de vista algébrico para o diferencial.

Durante o curso, nós vamos mostrar como podemos obter informações de diversos objetos conhecidos, como essas variedades bandeira, quando vistos de mais de um ponto de vista. Isso mostra, de certa maneira, como a teoria de Lie é interdisciplinar dentro da matemática.

1. Primeira aula

1.1. Álgebras de Lie: Definições básicas.

Definição 1.1. Seja $\Bbbk$ um corpo. Uma *álgebra de Lie* sobre $\Bbbk$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de uma transformação linear $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfazendo

(*i*) $[\mathsf{x}, \mathsf{x}] = 0$, para todo $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$;
(*ii*) $[\mathsf{x}, [\mathsf{y}, \mathsf{z}]] = [[\mathsf{x}, \mathsf{y}], \mathsf{z}] + [\mathsf{y}, [\mathsf{x}, \mathsf{z}]]$, para quaisquer $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathfrak{g}$.

Essa transformação $[\ ,\ ]$ é chamada de *colchete de Lie*.

Uma *subálgebra de Lie* de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um $\Bbbk$-subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ que, quando munido do colchete de Lie induzido de $\mathfrak{g}$, é uma álgebra de Lie.

Observação 1.2.
(1) Quando o corpo $\Bbbk$ é de característica diferente de 2, a primeira condição da Definição 1.1 é equivalente a $[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = -[\mathsf{y}, \mathsf{x}]$, $\forall\, \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$. Por isso tal condição é chamada de *anticomutatividade*.
(2) A segunda condição da Definição 1.1 é chamada de *identidade de Jacobi*.
(3) Neste mini-curso, nós só iremos considerar álgebras de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero.

Exemplo 1.3.
(1) Todo $\Bbbk$-espaço vetorial V munido do colchete de Lie definido por $[v, w] = 0$, $\forall\, v, w \in V$, é uma álgebra de Lie. Tal colchete é chamados de *trivial* e uma álgebra de Lie munida de um colchete trivial é chamada de *abeliana*.
(2) Dado um espaço vetorial V de dimensão $n \in \mathbb{N}$, o conjunto de endomorfismos lineares $T : V \to V$ pode ser identificado com o conjunto de matrizes de ordem n sobre $\Bbbk$. Denotando esse conjunto por $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ e definindo um colchete por $[A, B] = AB - BA$, para quaisquer $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, nós obtemos uma álgebra de Lie.

(3) O subconjunto de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ formado pelas matrizes de traço zero é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, denotada por $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$.
(4) Dado um $\Bbbk$-espaço vetorial $2n$-dimensional munido de uma forma bilinear antissimétrica e não degenerada, o subconjunto de $\mathfrak{gl}_{2n}(\Bbbk)$ formado pelas matrizes que preservam essa forma bilinear é uma álgebra de Lie, denotada por $\mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk)$.
(5) O subconjunto de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ formado pelas matrizes triangulares superiores é a subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, denotada por $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$.
(6) O subconjunto de $\mathfrak{sl}_\ell(\Bbbk)$ formado pelas matrizes estritamente triangulares superiores é a subálgebra de $\mathfrak{sl}_\ell(\Bbbk)$, denotada por $\mathfrak{n}_\ell(\Bbbk)$.
(7) O subconjunto de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ formado pelas matrizes diagonais é a subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, denotada por $\mathfrak{d}_n(\Bbbk)$.

Os exemplos $(3), (4)$ são dois exemplos das chamadas *álgebras de Lie clássicas*.

Exercício 1.4.
(1) Mostre que toda álgebra de Lie de dimensão 1 é abeliana.
(2) Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão 2 não abeliana, mostre que existem vetores $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$, tais que, como $\Bbbk$-espaços vetoriais, $\mathfrak{g} \simeq \Bbbk\mathsf{x} \oplus \Bbbk\mathsf{y}$ e o colchete de $\mathfrak{g}$ é dado por $[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = \mathsf{x}$.
(3) Dado um $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão n, munido de uma forma bilinear simétrica e não degenerada. Mostre que o subconjunto de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ formadado pelos endomorfismos que preservam essa forma bilinear é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Essa subálgebra é denotada por $\mathfrak{so}_n(\Bbbk)$.
(4) Dada uma $\Bbbk$-álgebra associativa A, defina um colchete da seguinte forma: $[a, b] := ab - ba$, para quaisquer $a, b \in A$. Denote por $\mathcal{L}ie(A)$ o espaço vetorial A, munido deste colchete. Mostre que $\mathcal{L}ie(A)$ é uma álgebra de Lie.

Observação 1.5. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, munida do colchete de Lie, não é uma álgebra associativa, pois, em geral, $\mathfrak{g}$ não é um anel associativo nem comutativo, nem tem unidade. Mas se consideramos o colchete de Lie como uma "multiplicação" no espaço vetorial $\mathfrak{g}$, obtem-se um "anel" onde a anticomutatividade substitui a comutatividade e a identidade de Jacobi substitui a associatividade.

Existe uma álgebra associativa e com unidade, que, em um certo sentido, substitui $\mathfrak{g}$. Essa álgebra $U(\mathfrak{g})$ é chamada *álgebra universal envelopante* e ela satisfaz a seguinte propriedade universal. Existe um homomorfismo de álgebras de Lie $\iota : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{L}ie(U(\mathfrak{g}))$, tal que, para toda álgebra associativa A e todo morfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}ie(A)$, existe um único morfismo de álgebras associativas $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to A$, que comuta o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\phi"'] & \arrow[d, phantom, "\#"] & U(\mathfrak{g}) \arrow[dl, dotted, "\varphi"] \\
& A. &
\end{tikzcd}$$

Definição 1.6. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ duas álgebras de Lie sobre o corpo $\Bbbk$. Uma transformação $\Bbbk$-linear $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um *morfismo* de álgebras de Lie quando $\varphi([\mathsf{x}, \mathsf{y}]) = [\varphi(\mathsf{x}), \varphi(\mathsf{y})]$ para quaisquer $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.7.
(1) Categoria. É fácil ver que $id : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um morfismo entre álgebras de Lie. Também é fácil ver que, dadas três álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ e dois morfismos entre álgebras de Lie $\varphi_1 : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ e $\varphi_2 : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_3$, a composição de morfismos $(\varphi_2 \circ \varphi_1) : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_3$ é também um morfismo entre álgebras de Lie.
(2) Teorema de Ado. Para toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que existe um morfismo injetivo de álgebras de Lie $\iota : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$.
(3) Representação adjunta. Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Como o colchete é uma função bilinear em $\mathfrak{g}$, fixando-se a primeira entrada, induz-se uma transformação linear em $\mathfrak{g}$ definida por

$$\begin{aligned}
[\mathsf{x}, \cdot] : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\
\mathsf{y} &\longmapsto [\mathsf{x}, \mathsf{y}]
\end{aligned}$$

Podemos definir um morfismo de álgebras de Lie $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dado por $\mathrm{ad}(\mathsf{x}) = [\mathsf{x}, \cdot]$. Essa transformação linear é chamada de *adjunta*.

(4) Automorfismo de Cartan. Considere a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ e uma base dada por

$$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathsf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A transformação linear $\omega : \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \to \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, definida por $\omega(\mathsf{x}) = -\mathsf{y}$, $\omega(\mathsf{h}) = -\mathsf{h}$, $\omega(\mathsf{y}) = -\mathsf{x}$, é um morfismo de álgebras de Lie.

Definição 1.8. Seja $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ um morfismo entre álgebras de Lie.

(a) O *núcleo de* φ é definido como o conjunto $\ker\varphi = \{\mathsf{x} \in \mathfrak{g}_1 \mid \varphi(\mathsf{x}) = 0\}$.

(b) A *imagem de* φ é definida como o conjunto $\mathrm{im}(\varphi) = \{\mathsf{y} \in \mathfrak{g}_2 \mid \exists\, \mathsf{x} \in \mathfrak{g}_1, \text{ tal que } \varphi(\mathsf{x}) = \mathsf{y}\}$.

Definição 1.9. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um subespaço vetorial $I \subseteq \mathfrak{g}$ é um *ideal* quando $[i, \mathsf{x}] \in I$ para quaisquer $i \in I$ e $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$. Nesse caso, define-se a *álgebra de Lie quociente* de $\mathfrak{g}$ por I como o espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/I$, com o colchete de Lie definido por $[\mathsf{x} + I, \mathsf{y} + I] = [\mathsf{x}, \mathsf{y}] + I$, para quaisquer $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$.

Teorema 1.10 (do isomorfismo)**.** Se $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um morfismo de álgebras de Lie, então $\ker(\varphi)$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ e existe um isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g}/\ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\varphi)$.

Demonstração. A primeira parte segue do fato de que, se $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$ e $\mathsf{x} \in \ker(\varphi)$, ou seja $\varphi(\mathsf{x}) = 0$, então

$$\varphi([\mathsf{x}, \mathsf{y}]) = [\varphi(\mathsf{x}), \varphi(\mathsf{y})] = [0, \varphi(\mathsf{y})] = 0.$$

Para provar a segunda parte, considere o morfismo $\xi : \mathfrak{g}/\ker(\varphi) \to \mathrm{im}(\varphi)$ dado explicitamente por $\xi(\mathsf{x} + \ker(\varphi)) = \varphi(\mathsf{x})$, para cada $\mathsf{x} + \ker(\varphi) \in \mathfrak{g}/\ker(\varphi)$. Do Teorema do Isomorfismo para espaços vetoriais, segue que ξ é um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais. Portanto basta mostrar que ξ é um morfismo de álgebras de Lie. Para quaisquer $(\mathsf{x} + \ker(\varphi)), (\mathsf{y} + \ker(\varphi)) \in \mathfrak{g}/\ker(\varphi)$, nós temos

$$\begin{aligned} \xi([\mathsf{x} + \ker(\varphi), \mathsf{y} + \ker(\varphi)]) &= \xi([\mathsf{x}, \mathsf{y}] + \ker(\varphi)) \\ &= \varphi([\mathsf{x}, \mathsf{y}]) \\ &= [\varphi(\mathsf{x}), \varphi(\mathsf{y})] \\ &= [\xi(\mathsf{x} + \ker(\varphi)), \xi(\mathsf{y} + \ker(\varphi))]. \end{aligned}$$

■

1.2. **Álgebras de Lie semissimples.** A partir desta seção vamos assumir que $\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e que toda álgebra de Lie tem dimensão finita.

Definição 1.11. Uma álgebra de Lie é chamada de *simples*, quando $\dim\mathfrak{g} > 1$ e $\mathfrak{g}$ não possui ideais próprios e não triviais. Uma álgebra de Lie é chamada de *semissimples* se não existem ideais $(0) \neq I \subseteq \mathfrak{g}$ abelianos (como álgebras de Lie).

Exemplo 1.12.

(1) Toda álgebra de Lie simples é semissimples. Mas nem toda álgebra de Lie seimissimples é simples. De fato, se $\dim\mathfrak{g} \leq 1$, então $\mathfrak{g}$ é semissimples, mas não é simples.

(2) Nenhuma álgebra de Lie abeliana é simples. De fato, se $\dim\mathfrak{g} = 1$, então, por definição, $\mathfrak{g}$ não é simples. Se $\dim\mathfrak{g} > 1$, então qualquer vetor $\mathsf{x} \in \mathfrak{g} \setminus (0)$ gera um ideal abeliano $\Bbbk\mathsf{x} \subset \mathfrak{g}$ não trivial.

(3) A álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ não é semissimples, pois a subálgebra $\Bbbk\,\mathrm{id} \subset \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ forma um ideal abeliano não trivial.

(4) As álgebras de Lie $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ e $\mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk)$ são simples.

Definição 1.13. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $(\ ,\ )$ uma forma bilinear em $\mathfrak{g}$. A forma bilinear $(\ ,\ )$ é dita *invariante* quando $(\mathsf{x}, [\mathsf{y}, \mathsf{z}]) = ([\mathsf{x}, \mathsf{y}], \mathsf{z})$ para quaisquer $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathfrak{g}$. O *radical* de $(\ ,\ )$ é o conjunto $\{\mathsf{g} \in \mathfrak{g} \mid (\mathsf{g}, \mathsf{x}) = 0,\ \forall\, \mathsf{x} \in \mathfrak{g}\}$. Uma forma bilinear simétrica é dita *não degenerada* quando o seu radical é nulo.

A forma bilinear definida por $(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\mathsf{x}) \circ \mathrm{ad}(\mathsf{y}))$, $\forall\, \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$, é chamada de *forma de Cartan-Killing* em $\mathfrak{g}$

Proposição 1.14.

(*i*) A forma de Cartan-Killing é simétrica e invariante.

(*ii*) Uma álgebra de Lie é semissimples se, e somente se, a forma de Cartan-Killing é não degenerada.

(*iii*) Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples, então existem ideais simples (como álgebras de Lie), $I_1, \ldots, I_l \subseteq \mathfrak{g}$, tais que $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \ldots \oplus I_l$. Todo ideal simples de $\mathfrak{g}$ coincide com algum I_j, $j \in \{1, \ldots, l\}$. A forma de Cartan-Killing em I_j é a restrição da forma em $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ para $I_j \times I_j$, $\forall\, j \in \{1, \ldots, l\}$.

1.3. **Álgebras torais e decomposição de Cartan complexa.** Nesta seção, vamos fixar $\Bbbk = \mathbb{C}$. Vamos começar relembrando uma definição dada no curso de álgebra linear.

Definição 1.15. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita. Uma transformação linear $T : V \to V$ é chamada de *semissimples* quando T for diagonalizável, e de *nilpotente* quando existir $n \in \mathbb{N}$, tal que $T^n = 0$.

A próxima proposição é conhecida como Teorema de Jordan. A decomposição dos endomorfismos de V (descrita nesta proposição) em uma soma de um endomorfismo semissimples e um nilpotente é chamada de *decomposição de Jordan-Chevalley*.

Proposição 1.16. Sejam V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\mathsf{x} : V \to V$ uma transformação linear. Então:

(1) Existem duas transformações lineares, $\mathsf{x}_s, \mathsf{x}_n : V \to V$, satisfazendo $\mathsf{x} = \mathsf{x}_s + \mathsf{x}_n$, onde x_s é semissimples, x_n é nilpotente e x_s comuta com x_n.

(2) Tais x_n e x_s são únicas.

(3) Se $U \subseteq W \subseteq V$ forem dois subespaços de V e $\mathsf{x}(W) \subseteq U$, então $\mathsf{x}_s(W), \mathsf{x}_n(W) \subseteq U$.

Demonstração. [Hum78, Proposition 4.2] ■

Observe que a representação adjunta define, para cada $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$, um endomorfismo de $\mathfrak{g}$, dado por $\mathrm{ad}(\mathsf{x})$. Portanto é possível considerar na decomposição de Jordan-Chevalley de $\mathrm{ad}(\mathsf{x})$.

Proposição 1.17. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$. Se $\mathrm{ad}(\mathsf{x}) = \mathrm{ad}(\mathsf{x})_s + \mathrm{ad}(\mathsf{x})_n$ é a decomposição de Jordan-Chevalley de $\mathrm{ad}(\mathsf{x})$, então $\mathrm{ad}(\mathsf{x})_s, \mathrm{ad}(\mathsf{x})_n \in \mathrm{im}(\mathrm{ad})$ e existem únicos $\mathsf{s}, \mathsf{n} \in \mathfrak{g}$, tais que $\mathrm{ad}(\mathsf{x})_n = \mathrm{ad}(\mathsf{n})$ e $\mathrm{ad}(\mathsf{x})_s = \mathrm{ad}(\mathsf{s})$.

Demonstração. [Hum78, §6.4] ■

Definição 1.18. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$ e $\mathrm{ad}(\mathsf{x}) = \mathrm{ad}(\mathsf{s}) + \mathrm{ad}(\mathsf{n})$ a decomposição de Jordan-Chevalley de $\mathrm{ad}(\mathsf{x})$. Defina a *decomposição de Jordan-Chevalley* de $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$ como $\mathsf{x} = \mathsf{s} + \mathsf{n}$, onde s é chamado de *parte semissimples* e n é chamado de *parte nilpotente* de x. Além disso, x é chamado de *nilpotente* se $\mathsf{s} = 0$ e de *semissimples* se $\mathsf{n} = 0$.

Define-se uma *subálgebra toral maximal* de $\mathfrak{g}$ como uma subálgebra maximal (no sentido da inclusão) dentre as subálgebras de $\mathfrak{g}$ que consistem somente de elementos semissimples.

Exercício 1.19. Mostre que a subálgebra toral maximal de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ é o subconjunto de matrizes diagonais.

Lema 1.20. Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, então existe uma subálgebra toral maximal não nula.

Demonstração. Considere o subconjunto $\mathcal{S} = \{\mathsf{s} \in \mathfrak{g} \mid \mathsf{s} = \mathsf{x}_s, \text{para algum } \mathsf{x} \in \mathfrak{g}\}$. Como $\mathfrak{g}$ é semissimples $\mathcal{S}$ é não vazio. De fato, se $\mathcal{S}$ fosse vazio, todo elemento $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$ seria ad-nilpotente e consequentemente nilpotente (cf. [Hum78, Theorem 3.2 (Engel)]). Como o conjunto $\mathcal{S}$ não é vazio, a família de subálgebras torais de $\mathfrak{g}$ também é não vazio. De fato, qualquer $\mathbb{C}\mathsf{s}$ com $\mathsf{s} \in \mathcal{S}$ é abeliana. Portanto podemos usar o Lema de Zorn e obter uma subálgebra toral maximal contida em $\mathfrak{g}$. ■

Proposição 1.21. Toda subálgebra toral maximal de uma álgebra de Lie é abeliana e

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{\mathsf{x} \in \mathfrak{g} \mid [\mathsf{x}, \mathsf{h}] \in \mathfrak{h}, \forall\, \mathsf{h} \in \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}.$$

Demonstração. [Hum78, Corollary 15.3] ■

Proposição 1.22 (Decomposição de Cartan complexa)**.** Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$, então existem um conjunto finito $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ e subálgebras de Lie $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$, para cada $\alpha \in \Phi$, tais que $\mathfrak{g}$ se decompõe da seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Demonstração. Considere a representação adjunta de $\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Usando o fato que todos os elementos de $\mathfrak{h}$ são semissimples, temos que $\mathrm{ad}(\mathsf{h}) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ são todos diagonálizáveis. Como eles comutam, podemos mudar a base de $\mathfrak{g}$ de tal forma que $\mathrm{ad}(\mathsf{h})$ sejam todos simultaneamente diagonais.

Para cada funcional $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, considere o conjunto $\mathfrak{g}_\alpha = \{\mathsf{x} \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(\mathsf{h})(\mathsf{x}) = \alpha(\mathsf{h})\mathsf{x}, \text{ para todo } \mathsf{h} \in \mathfrak{h}\}$. Pela identidade de Jacobi, $\mathfrak{g}_\alpha$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Observe que, como $\mathfrak{h}$ é abeliana, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Então considere o subconjunto $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq (0)\}$.

Como existe uma base de $\mathfrak{g}$ na qual todos os elementos de $\mathfrak{h}$ são diagonalizados simultaneamente, nós temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha)$. ■

Os elementos de Φ são chamados de *raízes* de $\mathfrak{g}$.

1.4. **Decomposição de Cartan para álgebras reais.** No caso em que $\Bbbk = \mathbb{R}$, é também possível obter uma decomposição de $\mathfrak{g}$ em auto-espaços de raízes à semelhança da Proposição 1.22. Entretanto, como $\mathbb{R}$ não é algebricamente fechado, não existe um resultado análogo à Proposição 1.16 que garanta a existência de elementos semissimples.

Vamos apresentar abaixo o roteiro de como proceder no caso das álgebras semissimples reais.

Definição 1.23. Sejam V e W espaços vetoriais complexo e real, respectivamente.

(1) O *realificado* de V é o espaço vetorial real $V^{\mathbb{R}}$ obtido de V por restrição dos escalares a $\mathbb{R}$.
(2) O *complexificado* de W é o espaço vetorial complexo $W^{\mathbb{C}} = W + iW = \{u + iv \mid u, v \in W\}$.
(3) Uma *estrutura complexa* em W é uma transformação linear $J : W \to W$ que satisfaz $J^2 = -\mathrm{id}$.
(4) Uma *conjugação* em V é uma transformação linear $\sigma : V \to V$ que satisfaz $\sigma^2 = \mathrm{id}$ e $\sigma(\lambda w) = \overline{\lambda} w$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{C}$ e $w \in V$.

Exemplo 1.24.

(1) Suponha que $V = \mathbb{C}^n$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ seja uma base para V. O realificado de V, como conjunto, é V, e, como espaço vetorial, é isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$, com uma $\mathbb{R}$-base dada por $\{v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n\}$.
(2) Suponha que $W = \mathbb{R}^n$, com base $\{w_1, \ldots, w_n\}$. O complexificado de W, como conjunto é $W \times iW$, e, como espaço vetrorial, é $W \oplus iW \simeq \mathbb{C}^n$, com uma $\mathbb{C}$-base dada por $\{w_1, \ldots, w_n\}$.

Observação 1.25.

(1) Observe que o realificado de um espaço vetorial complexo tem uma estrutura complexa canônica. Por exemplo, o realificado de $V = \mathbb{C}^n$, admite a estrutura complexa dada por $J(v) = iv$ para todo $v \in V$.
(2) A conjugação usual dos números complexos induzida em um espaço vetorial complexificado

$$\begin{aligned} \sigma\colon (W \oplus iW) &\longrightarrow (W \oplus iW) \\ v + iw &\longmapsto v - iw \end{aligned}$$

é claramente uma conjugação.
(3) Dado um espaço vetorial complexo V, o espaço vetorial realificado $V^{\mathbb{R}}$ munido de uma estrutura complexa J determina uma estrutura de espaço vetorial complexo em V definindo a multiplicação por escalares como $(a + ib)v = av + bJ(v)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.
(4) Dado um espaço vetorial real, o espaço vetorial complexificado $W^{\mathbb{C}}$ munido de uma conjugação σ determina um espaço vetorial real W_0 dado pelo subespaço dos pontos fixos de σ, $W_0 = \{w \in W^{\mathbb{C}} \mid \sigma(w) = w\}$.

Em suma, espaços vetoriais complexos estão em bijeção com espaços vetoriais reais providos de uma estrutura complexa e, reciprocamente, existe uma bijeção entre as conjugações de um espaço vetorial complexo V e seus subespaços reais que se complexificam em V.

Definição 1.26. Considere uma álgebra complexa $\mathfrak{g}$ e σ uma conjugação. A conjugação $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é chamada de *antiautomorfismo* quando $\sigma[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = [\sigma\mathsf{x}, \sigma\mathsf{y}]$, $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$.

Observe que o subespaço real dos pontos fixos de um antiautomorfismo é uma subálgebra de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Assim, dado um antiautomorfismo σ em $\mathfrak{g}$, a álgebra real $\mathfrak{g}_0 = \{\mathsf{x} \in \mathfrak{g} \mid \sigma(\mathsf{x}) = \mathsf{x}\}$ tem por complexificada a álgebra complexa $\mathfrak{g}$.

Definição 1.27. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra complexa. Uma *forma real* de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ que é o subespaço dos pontos fixos de um antiautomorfismo. Neste caso, $\mathfrak{g}$ é o complexificado de $\mathfrak{g}_0$.

Exemplo 1.28. Tome $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Se σ for a conjugação usual de números complexos em cada entrada das matrizes de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. Se σ for dada por $\sigma(A) = -\overline{A}^t$, então σ é um antiautomorfismo de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ é uma forma real de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

Definição 1.29. Uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ é dita *compacta* se sua forma de Cartan-Killing é negativa-definida.

O próximo teorema segue da decomposição obtida pela Proposição 1.22.

Teorema 1.30. Toda álgebra semissimples complexa admite uma forma real compacta.

Demonstração. [San10, Teorema 12.13] ∎

Teorema 1.31. Seja $\mathfrak{g}_0$ uma forma real de uma álgebra semissimples complexa. Seja $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta. Então $\mathfrak{g}_0$ se decompõe como $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ onde $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$.

Demonstração. [San10, Seção 12.3] ∎

Esta decomposição também é conhecida por *decomposição de Cartan.* Os colchetes entre os elementos da decomposição de Cartan satisfazem

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} \quad , \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \quad \text{e} \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Exemplo 1.32. A decomposição de Cartan é inspirada na decomposição do espaço de matrizes em soma direta do espaço de matrizes anti-simétricas e das matrizes simétricas. Tomando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, uma forma real compacta é a álgebra de Lie $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : X + \bar{X}^t = 0 \text{ e } \mathrm{tr}(X) = 0\}$. Se $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ então $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$ é a subálgebra das matrizes que anti-hermitianas e reais, isto é, a subálgebra $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ das matrizes anti-simétricas enquanto $\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}$ é o subespaço das matrizes reais x tais que $i\mathsf{x}$ é anti-hermitiana e, portanto, é o subespaço $\mathfrak{s}$ das matrizes simétricas. Em suma, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}$ é uma decomposição de Cartan.

Proposição 1.33. Seja $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan. Então:

- O automorfismo involutivo θ definido por $\theta(\mathsf{x}) = \mathsf{x}$ se $\mathsf{x} \in \mathfrak{k}$ e $\theta(\mathsf{y}) = -\mathsf{y}$ se $\mathsf{x} \in \mathfrak{p}$ é tal que a forma bilinear $B_\theta(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = -(\mathsf{x}, \theta\mathsf{y})$ é um produto interno em $\mathfrak{g}$.
- A matriz $\mathrm{ad}(\mathsf{x})$, $\mathsf{x} \in \mathfrak{k}$, é anti-simétrica em relação a B_θ enquanto $\mathrm{ad}(\mathsf{y})$, $\mathsf{y} \in \mathfrak{p}$, é simétrica.

Demonstração. [San10, Teorema 12.22] ∎

Agora, seja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ uma subálgebra abeliana, maximal em $\mathfrak{p}$. Ela é quem desempenha nas álgebras reais o papel da subálgebra de Cartan nas álgebras complexas. Como $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, pela Proposição 1.33, as adjuntas de seus elementos são simétricas em relação ao produto interno B_θ e, portanto, o conjunto $\{\mathrm{ad}(\mathsf{h}) : \mathsf{h} \in \mathfrak{a}\}$ é uma família de operadores auto-adjuntos de $\mathfrak{g}_0$ simultaneamente diagonalizáveis com autovalores são reais. Seja $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ e considere o subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{\mathsf{x} \in \mathfrak{g}_0 \mid \mathrm{ad}(\mathsf{h})\mathsf{x} = \alpha(\mathsf{h})\mathsf{x} \quad \text{para todo} \quad \mathsf{h} \in \mathfrak{a}\}.$$

O funcional $\alpha \neq 0$ é chamado de *raíz restrita* de $\mathfrak{g}_0$ em relação a $\mathfrak{a}$ caso $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Vamos denotar o conjunto de raízes restritas por Σ. O funcional nulo também aparece como um peso da *representação.* Denotando $\mathfrak{m}$ o subespaço de *peso* associado ao *peso* nulo, $\mathfrak{g}_0$ se decompõe como

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha.$$

1.5. **Representações de álgebras de Lie simples.**

Definição 1.34. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\Bbbk$. Uma *representação* de $\mathfrak{g}$ em um $\Bbbk$-espaço vetorial V é um morfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Uma representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é dita *redutível*, quando existe um subespaço vetorial não trivial $W \subset V$, tal que $\rho(\mathsf{x})w \in W$, para todo $w \in W$ e $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$. Caso contrário, a representação é chamada de *irredutível.*

Observação 1.35. Considere uma representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

(1) A dimensão de V é chamada de *dimensão* da representação ρ. Neste mini-curso nós só consideraremos representações de dimensão finita.
(2) Se ρ for injetora, então a representação é dita *fiel.* Pelo Teorema do isomorfismo (Teorema 1.10), não há perda de generalidade em considerarmos apenas representações fiéis. De fato, se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação e $I = \ker(\rho)$, então $\overline{\rho} : \mathfrak{g}/I \to \mathfrak{gl}(V)$ também é uma representação. Pela demonstração do Teorema 1.10, $\overline{\rho}(\mathsf{x} + I) = \rho(\mathsf{x})$ e esta representação $\overline{\rho}$ é fiel.
(3) As representações irredutíveis são como átomos para construção de representações de $\mathfrak{g}$. De fato toda representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ de dimensão finita de uma álgebra de Lie simples e de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, pode ser decomposta da seguinte forma. Existem subespaços não triviais $V_1, \ldots, V_m \subseteq V$, tais que $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ e $\rho_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_i)$ são representações irredutíveis para cada $i = 1, \ldots, m$ (cf. [Hum78, Theorem 6.3]).

Exemplo 1.36.
(1) Para toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a adjunta (definida no Exemplo 1.7.3) é uma representação $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Além disso, $\mathfrak{g}$ é simples se, e somente se, ad é fiel.
(2) Se $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, então existe uma representação natural de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial n-dimensional $i : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\Bbbk^n)$.

Teorema 1.37. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ de dimensão $(n + 1)$.

Demonstração. Considere $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ com uma base dada por

$$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathsf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o espaço vetorial $L(n) = \Bbbk^{n+1}$. Nós vamos construir uma base e descrever como $\rho(\mathsf{x})$, $\rho(\mathsf{h})$ e $\rho(\mathsf{y})$ transformam essa base em $L(n)$.

Primeiro, vamos denotar a base de $L(n)$ por $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$.

- Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, definimos $\rho(\mathsf{h})e_i = (n - 2i)e_i$.
- Se $i = 0, 1, \ldots, (n - 1)$, definimos $\rho(\mathsf{y})e_i = (i + 1)e_{i+1}$ e, definimos $\rho(\mathsf{y})e_n = 0$.
- Por fim, se $i = 1, \ldots, n$, definimos $\rho(\mathsf{x})e_i = (n - i + 1)e_{i-1}$ e, definimos $\rho(\mathsf{x})e_0 = 0$.

Vamos verificar que isso de fato define uma representação de $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. Primeiro observe que ρ é, por definição, uma transformação linear. Portanto basta mostrar que $\rho[a, b] = \rho(a)\rho(b) - \rho(b)\rho(a)$, para quaisquer $a, b \in \mathfrak{g}$. Como o colchete $[-, -]$ é bilinear, basta mostrar para os elementos da base de $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$.

Por um lado

$$\begin{aligned} \rho([\mathsf{x}, \mathsf{h}])e_i &= \rho(-2\mathsf{x})e_i \\ &= -2\rho(\mathsf{x})e_i \\ &= -2(n - i + 1)e_{i-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\rho(\mathsf{x})\rho(\mathsf{h})e_i - \rho(\mathsf{h})\rho(\mathsf{x})e_i &= \rho(\mathsf{x})(n-2i)e_i - \rho(\mathsf{h})(n-i+1)e_{i-1}\\ &= (n-2i)(n-i+1)e_{i-1}\\ &\quad - (n-2(i-1))(n-i+1)e_{i-1}\\ &= ((n-2i)-(n-2i+2))(n-i+1)e_{i-1}\\ &= -2(n-i+1)e_{i-1}.\end{aligned}$$

Por um lado

$$\begin{aligned}\rho([\mathsf{x},\mathsf{y}])e_i &= \rho(\mathsf{h})e_i\\ &= (n-2i)e_i.\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\rho(\mathsf{x})\rho(\mathsf{y})e_i - \rho(\mathsf{y})\rho(\mathsf{x})e_i &= \rho(\mathsf{x})(i+1)e_{i+1} - \rho(\mathsf{y})(n-i+1)e_{i-1}\\ &= (n-i)(i+1)e_i - (n-i+1)ie_i\\ &= (n(i+1) - i(i+1) - ni + (i-1)i)e_i\\ &= (n-2i)e_i.\end{aligned}$$

Por um lado

$$\begin{aligned}\rho([\mathsf{h},\mathsf{y}])e_i &= \rho(-2\mathsf{y})e_i\\ &= -2(i+1)e_{i+1}.\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\rho(\mathsf{h})\rho(\mathsf{y})e_i - \rho(\mathsf{y})\rho(\mathsf{h})e_i &= \rho(\mathsf{h})(i+1)e_{i+1} - \rho(\mathsf{y})(n-2i)e_i\\ &= (n-2(i+1))(i+1)e_{i+1}\\ &\quad - (i+1)(n-2i)e_{i+1}\\ &= -2(i+1)e_{i+1}.\end{aligned}$$

■

Dada uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$, existe um subconjunto $P^+ \subset \mathfrak{h}^*$, chamado de reticulado de pesos dominantes, tal que, para cada $\lambda \in P^+$, existe uma única representação irredutível $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(L(\lambda))$. Toda representação irredutível é da forma $L(\lambda)$ e a construção de tais representações irredutíveis é análoga a de $\mathfrak{sl}_2$ (cf. [Hum78, Corollary 21.2]).

2. Segunda aula

A partir desta aula vamos fixar $\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

2.1. **Variedades e Aplicações Diferenciáveis.**

Vamos primeiro relembrar algumas definições de topologia. Vamos fixar que todo espaço topológico é um espaço Hausdorff e que possui uma base enumerável de abertos para a topologia. Nesta seção, vamos fixar $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Definição 2.1. Um *espaço localmente euclideano* de dimensão d é um espaço topológico M em que, para cada ponto $p \in M$, existem um aberto $U_p \subseteq M$, $p \in U_p$, e um homeomorfismo $\phi_p : U_p \to V_p$, onde V_p é um aberto de $\mathbb{R}^d$. O par (U_p, ϕ_p) é chamado de *sistema de coordenadas* no ponto p.

Definição 2.2. Seja M um espaço localmente euclidiano de dimensão d. Uma *estrutura diferenciável* de classe C^k, $1 \le k \le \infty$, em M é uma coleção de sistemas de coordenadas $\mathcal{C} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ que satisfaz:

(1) $\{U_i \mid i \in I\}$ é uma cobertura de M, isto é, $M = \cup_{i\in I} U_i$.
(2) As funções $(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$ são de classe C^k para quaisquer $i, j \in I$.

(3) A coleção $\mathcal{C}$ é maximal: se (U, ϕ) é um sistema de coordenadas com a propriedade de que $\phi \circ \phi_j^{-1}$ e $\phi_j \circ \phi^{-1}$ são de classe $\mathcal{C}^k$ para todo $i \in I$ então $(U, \phi) \in \mathcal{C}$.

Uma *variedade diferenciável* de dimensão d é um par $(M, \mathcal{C})$. As funções $(\phi_i \circ \phi_j^{-1})_{i,j \in I}$ são chamadas de funções de transição. As variedades diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^\infty$ são chamadas de variedades suaves.

Observação 2.3. A primeira condição garante que, para todo ponto $p \in M$, existe um aberto $U_i \subset M$, $i \in I$, tal que $p \in U_i$ e U_i é homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^d$. A segunda e a terceira condições garantem que a escolha de tal U_i não é muito importante. De fato, para toda tal escolha, podemos mudar o sistema de coordenadas de maneira C^k.

Em resumo, a definição acima garante que, mesmo do ponto de vista diferenciável, podemos sempre considerar localmente uma variedade suave como um $\mathbb{R}^d$.

Definição 2.4. Sejam M e N duas variedades suaves.

(1) Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é dita *diferenciável* se $f \circ \phi^{-1}$ for de classe $\mathcal{C}^\infty$ para todos os sistemas de coordenadas (U, ϕ). Denotaremos por $\mathcal{C}^\infty(M)$ ao conjunto de funções diferenciáveis $f : M \to \mathbb{R}$.
(2) Uma função $F : M \to N$ é dita *diferenciável* se $(\tau \circ F \circ \phi^{-1})$ for de classe $\mathcal{C}^\infty$ para todos os sistemas de coordenadas (U, ϕ) de M e (V, τ) de N.
(3) Uma função diferenciável $F : M \to N$ bijetora com inversa diferenciável é chamada de *difeomorfismo*.

Observe que $\mathcal{C}^\infty(M)$ é um anel com a multiplicação dada por

$$\begin{array}{rccc} fg \colon & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & f(p)g(p), \end{array}$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Vamos chamá-lo de *anel de coordenadas* de M.

Exemplo 2.5.

(1) $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável com estrutura diferenciável determinada pela coleção de coordenadas maximal que contém o sistema de coordenadas $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})$, onde $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade.
(2) Espaços vetoriais. Em particular, o espaço das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais, $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, é uma variedade n^2-dimensional.
(3) Um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Mais geralmente, um subconjunto aberto de uma variedade n-dimensional é uma variedade n-dimensional.
(4) O grupo geral linear $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes invertíveis é uma variedade n^2-dimensional visto como um subconjunto aberto dentro da variedade n^2-dimensional $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2. **Variedades Algébricas.** Nesta seção vamos fixar $\Bbbk = \mathbb{C}$ e vamos construir objetos análogos às variedades diferenciáveis sob um contexto mais algébrico.

Definição 2.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o *espaço afim* n-dimensional $\mathbb{A}^n := \Bbbk^n$. Um subconjunto $V \subset \mathbb{A}^n$ é dito fechado, quando existe um ideal $I \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $V = \{a \in \mathbb{A}^n \mid p(a) = 0, \text{para todo } p \in I\}$. Um subconjunto fechado de um espaço afim é dito uma *variedade afim*.

Observe que a definição acima define uma topologia em cada espaço afim. Além disso, cada variedade afim é munida naturalmente de uma topologia induzida do espaço afim.

Definição 2.7. Seja $X = \{a \in \mathbb{A}^n \mid p(a) = 0, \text{para todo } p \in I\} \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim. Um subconjunto $Y \subseteq X$ é dito fechado se existir um ideal $J \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, $I \subseteq J$, tal que $Y = \{a \in \mathbb{A}^n \mid p(a) = 0, \text{para todo } p \in J\}$. Essa topologia é chamada de *topologia de Zariski*.

Exemplo 2.8. (1) Cada $\mathbb{A}^n$ é uma variedade algébrica. Em geral, todo espaço vetorial de dimensão finita, V, pode ser visto como uma variedade algébrica afim de dimensão $\dim V$.
(2) Em particular, álgebras de Lie de dimensão finita são variedades algébricas afins. O espaço das matrizes quadradas de ordem n, $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$, é uma variedade n^2-dimensional.

(3) Considere o polinômio $p_0(x,y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{C}[x,y]$. O conjunto de zeros desse polinômio é $V_0 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2+y^2 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x+y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x-y=0\}$, uma união (não disjunta) de duas retas. Agora considere o polinômio $p_1(x,y) = x^2+y^2-1 \in \mathbb{C}[x,y]$. O conjunto de zeros desse polinômio é $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, ou seja, uma esfera.

Definição 2.9. Sejam $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ duas variedades algébricas afins. Uma função $f : X \to Y$ é dita *regular* se exitirem $p_1, \ldots, p_m \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Um isomorfismo de variedades algébricas é uma função regular com inversa regular. O conjunto de funções regulares $f : X \to \mathbb{A}^1$ é denotado por $\Bbbk[X]$ e é chamado de anel de coordenadas de X.

Observe que tais funções são continuas de acordo com a topologia introduzida acima, já que a imagem inversa de fechados é fechado.

Exemplo 2.10. Os subconjuntos abertos de variedades algébricas não são imediatamente variedades algébricas. Mas nós podemos identificá-las com certas variedades.

(1) Considere o aberto $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}^1$ e considere a variedade algébrica $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy = 1\} \subseteq \mathbb{A}^2$. A função $f : Y \to \mathbb{A}^1$ dada por $f(x,y) = x$ é regular e que ela induz um isomorfismo entre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e Y.
(2) Os grupos geral linear $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ são isomorfos a uma variedade algébrica afim da seguinte forma. Considere $V = \{(a_0, a_{ij}) \in \mathbb{A}^{n^2+1} \mid a_0 \det(a_{ij}) = 1\}$. É fácil ver que V é uma variedade algébrica afim, pois det é um polinômio nas entradas (a_{ij}). Além disso, a função $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to V$ dada por $\varphi(A) = (\det(a)^{-1}, A)$ é um isomorfismo entre V e $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exemplo 2.11. (1) Para todo $n > 0$, o anel de coordenadas $\Bbbk[\mathbb{A}^n]$ é isomorfo a $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. De fato, as funções regulares $f : \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ são identificadas com polinômios $f(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_n)$, para algum $p \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.
(2) Se $V = \{a \in \mathbb{A}^n \mid p(a) = 0\}$ para algum polinômio $p \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, então o anel de coordenadas de V é dado por $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/\langle p \rangle$. De fato, uma função regular $f : V \to \Bbbk$ pode ser identificada com um polinômio $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, para algum $g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Como o domínio de f é o conjunto de pontos onde p se anula, se $g_1, g_2 \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ são iguais, ou seja $g_1 - g_2 = 0$, no conjunto V, onde $p = 0$, então podemos identificar g_1 e g_2 com a mesma função regular. Portanto, se $g_1 - g_2 \in \langle p \rangle$, eles representam a mesma função regular em V.
(3) Como caso particular do exemplo anterior, $\Bbbk[\mathrm{GL}_n] \simeq \Bbbk[\mathbb{A}^{n^2+1}]/\langle x_0 \det(x_{ij}) - 1 \rangle \simeq \Bbbk[\mathbb{A}^{n^2}]$.
(4) Como outro caso particular do segundo exemplo, $\Bbbk[\mathrm{SL}_n] \simeq \Bbbk[\mathbb{A}^{n^2}]/\langle \det(x_{ij}) - 1 \rangle$.

Apesar das técnicas serem distintas, a maior parte dos resultados deste curso serão válidos tanto para variedades diferenciáveis (sobre $\mathbb{R}$) quanto para variedades algébricas (sobre $\mathbb{C}$). A partir de agora, nós chamaremos variedades diferenciáveis e algébricas simplesmente de *variedade*; funções diferenciáveis e funções regulares simplesmente de *morfismos de variedades*; e denotaremos anel de coordenadas - de funções diferenciáveis e funções regulares - simplesmente por $A(X)$.

2.3. **Grupos de Lie.** Nesta seção voltaremos a usar o corpo $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 2.12. Um *grupo de Lie* é um conjunto G munido de estruturas de variedade e grupo, tal que a multiplicação do grupo

$$\begin{aligned} m \colon G \times G &\longrightarrow X \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

e a inversa

$$\begin{aligned} i \colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

são morfismos.

Observe que o fato da inversa ser morfismo é equivalente ao fato dela ser um isomorfismo. De fato, $i(g^{-1}) = g$, $\forall\, g \in G$. Portanto a inversa é a sua própria inversa.

Exemplo 2.13. (1) Considere o espaço vetorial $\Bbbk^n$ como grupo aditivo, com a adição coordenada a coordenada no corpo $\Bbbk$. Dessa forma, $\Bbbk^n$ é munido de uma estrutura de grupo de Lie. De fato, a multiplicação, $m(x, y) = x+y$, $\forall\, x, y \in \Bbbk^n$, é uma função polinomial e, portanto, diferenciável e a inversa $i(x) = -x$, $\forall\, x \in \Bbbk^n$ também. Em particular, a identidade desse grupo de Lie é $(0, \ldots, 0) \in \Bbbk^n$.

No caso em que $n = 1$, o grupo $\Bbbk$ é chamado de *grupo aditivo* e denotado por $G_a(\Bbbk)$.

(2) O grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ munido com a multiplicação usual de matrizes é um grupo de Lie. Já vimos que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é uma variedade n^2-dimensional. A multiplicação de matrizes é polinomial (de grau dois nas entradas das matrizes) e, portanto, diferenciável. Da mesma forma, a inversa de uma matriz pode ser obtida pela regra de Cramer, que só envolve determinantes. Portanto a inversa também é uma função polinomial e diferenciável. A identidade de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é a matriz identidade de ordem n.

(3) Se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G, então H é um subgrupo de Lie. No contexto diferenciável, este resultado é um teorema clássico conhecido como Teorema de Cartan do subgrupo fechado. No contexto algébrico isso segue do fato que todo subconjunto fechado é uma variedade algébrica afim.

(4) Para cada $n > 0$, o subgrupo $\mathrm{SL}_n(\Bbbk) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \mid \det A = 1\}$ é um grupo de Lie. De fato, $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$ é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

Definição 2.14. Um *morfismo* entre grupos de Lie G_1 e G_2 é um morfismo $G_1 \to G_2$ de variedades e um homomorfismo de grupos. Um *isomorfismo* entre grupos de Lie é um isomorfismo de variedades que é um isomorfismo de grupos.

Exemplo 2.15. Em um grupo de Lie G é possível definir, para cada $g \in G$, as funções:

(1) $\begin{array}{rcl} E_g\colon G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & gh \end{array}$, chamada de *translação à esquerda* por g.

(2) $\begin{array}{rcl} D_g\colon G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & hg \end{array}$, chamada de *translação à direita* por g.

(3) $\begin{array}{rcl} C_g\colon G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & ghg^{-1} \end{array}$, chamada de *conjugação* por g.

Proposição 2.16. Em um grupo de Lie, as translações e as conjugações são isomorfismos.

Dem: Considere um grupo de Lie G. Basta mostrar que translações à esquerda são isomorfismos. De fato, a demonstração é análoga para translações à direita e toda conjugação é composição de translações, a saber, $C_g = D_{g^{-1}} \circ E_g$ para todo $g \in G$. Como $m : G \times G \to G$ é um morfismo, $E_g : G \to G$ também é. Além disso, para cada $g \in G$, $E_{g^{-1}}$ é o morfismo inverso de E_g. Portanto, translações à esquerda são automorfismos de G. ∎

Definição 2.17. Sejam G um grupo de Lie e V um espaço vetorial. Uma *representação de G* é um morfismo de grupos de Lie $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.

Exemplo 2.18.

(1) Representação natural. Se G é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, então existe uma representação natural $i : G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

(2) Representação Adjunta. Considere $G = \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ e $V = \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Existe uma representação de G em V definida via conjugação de matrizes. Explicitamente

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ad}\colon \mathrm{GL}_n(\Bbbk) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)) \\ A & \longmapsto & \mathrm{Ad}(A) : B \mapsto (ABA^{-1}) \end{array}$$

(3) Translação à esquerda. Para cada $g \in G$, podemos considerar a seguinte transformação linear em $V = A(G)$

$$\begin{array}{rcl} E_g^*\colon A(G) & \longrightarrow & A(G) \\ f & \longmapsto & f \circ E_g. \end{array}$$

Isso induz uma representação $\varepsilon : G \to GL(A(G))$, onde $\varepsilon(g) = E_g^*$.

2.4. **Espaço Tangente.** Sejam M uma variedade de dimensão d e $p \in M$.

Definição 2.19. Uma *derivação* em p é uma transformação linear $d : A(M) \to \Bbbk$, satisfazendo

$$d(fg) = f(p)d(g) + d(f)g(p),$$

para quaisquer $f, g \in A(M)$. O conjunto de todas as derivações de $A(M)$ em p é um espaço vetorial chamado de *espaço tangente* a M em p e denotado por T_pM. Um elemento de T_pM é chamado de *vetor tangente* a M no ponto p.

Observe que:

(1) Se $f \in A(M)$ for constante, então $d(f) = 0$, para qualquer $d \in T_pM$.
(2) Se $f(p) = g(p) = 0$, então $d(fg) = 0$, para qualquer $d \in T_pM$.

Definição 2.20. Sejam $F : M \to N$ um morfismo de variedades e $p \in M$. A função

$$\begin{aligned} F_* \colon T_pM &\longrightarrow T_{F(p)}N \\ X &\longmapsto X(- \circ F) \end{aligned}$$

é chamada de *push-forward* ou *diferencial* associada a F.

Exercício 2.21. (1) Mostre que $F_*(X)$ é de fato uma derivação em $A(N)$.
(2) Se F for um isomorfismo, mostre que F_* é um isomorfismo linear. EM particular, observe que, como a multiplicação à esquerda é um isomorfismo, para cada $g \in G$, o morfismo

$$\begin{aligned} E_{g_*} \colon T_hG &\longrightarrow T_hG \\ \mathsf{x} &\longmapsto \mathsf{x}(- \circ E_g) \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear.

Definição 2.22. Seja M uma variedade. Um *campo vetorial* em M é uma função

$$\begin{aligned} X \colon M &\longrightarrow (\sqcup_{x\in M} T_xM) \\ p &\longmapsto X_p, \end{aligned}$$

tal que, $X_p \in T_pM$ e, para toda $f \in A(M)$, a função induzida

$$\begin{aligned} X(f) \colon M &\longrightarrow \Bbbk \\ p &\longmapsto X_p(f), \end{aligned}$$

é um elemento de $A(M)$.

Considere X, Y campos vetoriais em uma variedade M e um ponto $p \in M$. Dada uma função $f \in A(M)$, obtemos uma nova função $X(f) \in A(M)$. Como $Y_p \in T_pM$, podemos aplicar Y_p em $X(f)$ para obter $Y_p(X(f)) \in \Bbbk$. Obviamente podemos fazer o contrário e obter $X_p(Y(f)) \in \Bbbk$. A pergunta natural é: qual é a diferença entre eles?

Definição 2.23. Dada uma variedade M, um ponto $p \in M$ e dois campos vetoriais, X, Y, em M, defina o *colchete de Lie* de X, Y como a transformação linear

$$\begin{aligned} [X, Y]_p \colon A(M) &\longrightarrow \Bbbk \\ f &\longmapsto X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)). \end{aligned}$$

Proposição 2.24. Para quaisquer dois campos vetoriais X, Y em M, $[X, Y]_p$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $[X, Y]_p \in T_pM$.
(2) A aplicação $p \mapsto [X, Y]_p$ define um campo vetorial suave em M que satisfaz

$$[X, Y]f = XY(f) - YX(f).$$

Demonstração. [Lee03, Lemma 13.1] ■

Vamos denotar por $\mathcal{X}(M)$ o $A(M)$-módulo que consiste dos campos vetoriais na variedade M. Segue que $\mathcal{X}(M)$ munido do colchete de Lie [,] é uma álgebra de Lie, chamada de *álgebra de Lie dos campos de vetores de M*.

2.5. **Álgebras de Lie de grupos de Lie.** Nessa subseção nós vamos obter uma classe especial de espaços tangentes associados a um grupo de Lie, que formam uma família bem particular de álgebras de Lie.

Definição 2.25. Seja G um grupo de Lie. Defina a *álgebra de Lie* de G como o espaço tangente a variedade G na identidade do grupo, $T_eG = \mathfrak{g}$.

Seja $\varphi : G \to H$ um morfismo de grupos de Lie. Existe um morfismo entre as álgebras de Lie correspondentes, a saber, $\varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, onde $\varphi_*(\mathsf{x}) = \mathsf{x}(- \circ \varphi)$ para cada $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$. Com isso, nós associamos aos grupos de Lie e seus morfismos, álgebras de Lie e seus morfismos.

Exemplo 2.26. Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G. A inclusão $\iota : H \hookrightarrow G$ é um morfismo injetor de variedades. Portanto ι pode ser visto como um isomorfismo entre H e um subgrupo fechado de G. Dessa forma, a derivada de ι é uma inclusão de álgebras de Lie $\iota_* : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$.

Observação 2.27. Em todo grupo de Lie G a dimensão da álgebra de Lie de G (como espaço vetorial) é igual a dimensão de G (como variedade).

Apesar das observações acima nos permitirem calcular a estrutura de espaço vetorial da álgebra de Lie associada a um grupo de Lie G, ela não é muito conveniente para calcular o colchete de Lie em T_eG. Para isso, vamos introduzir uma segunda caracterização de T_eG.

Definição 2.28. Dado um grupo de Lie G, defina $\mathcal{L}(G)$ como o conjunto de transformações lineares $\delta : A(G) \to A(G)$, satisfazendo:

(1) $\delta(f_1 f_2) = f_1\delta(f_2) + \delta(f_1)f_2$, para quaisquer $f_1, f_2 \in A(G)$.
(2) ${E_g}^* \circ \delta = \delta \circ {E_g}^*$, para todo $g \in G$.

Proposição 2.29. Para todo grupo de Lie G, o conjunto $\mathcal{L}(G)$ tem uma estrutura de álgebra de Lie.

Demonstração. Primeiro vamos introduzir um colchete em $\mathcal{L}(G)$, definido pelo comutador, ou seja, para quaisquer $d_1, d_2 \in \mathcal{L}(G)$, defina $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$. Observe que $[d_1, d_2]$ satisfaz a anti-comutatividade e a identidade de Jacobi. Agora vamos mostrar que, de fato, $[d_1, d_2] \in \mathcal{L}(G)$. Para quaisquer $f, g \in A(G)$

$$\begin{aligned}
d_1 \circ d_2(fg) &= d_1(fd_2(g) + d_2(f)g) \\
&= d_1(fd_2(g)) + d_1(d_2(f)g) \\
&= fd_1(d_2(g)) + d_1(f)d_2(g) + d_1(d_2(f))g + d_2(f)d_1(g) \\
d_2 \circ d_1(fg) &= d_2(fd_1(g) + d_1(f)g) \\
&= d_2(fd_1(g)) + d_2(d_1(f)g) \\
&= fd_2(d_1(g)) + d_2(f)d_1(g) + d_2(d_1(f))g + d_1(f)d_2(g).
\end{aligned}$$

Portanto $(d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(fg) = (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(f)g + f(d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(g)$. Além disso

$$\begin{aligned}
{E_g}^* \circ [d_1, d_2] &= {E_g}^* \circ d_1 \circ d_2 - {E_g}^* \circ d_2 \circ d_1 \\
&= d_1 \circ {E_g}^* \circ d_2 - d_2 \circ {E_g}^* \circ d_1 \\
&= d_1 \circ d_2 \circ {E_g}^* - d_2 \circ d_1 \circ {E_g}^* \\
&= [d_1, d_2] \circ {E_g}^*.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{L}(G)$, munido do colchete definido pelo comutador, é uma álgebra de Lie. ∎

Teorema 2.30. Para todo grupo de Lie G, existe um isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathcal{L}(G)$ e T_eG.

Demonstração. Observe que, como as derivações de $\delta \in \mathcal{L}(G)$ são invariantes à esquerda e E_g age transitivamente em G, a função δ é determinada unicamente por sua avaliação no ponto $e \in G$. De fato, para todo $g \in G$

$$\begin{aligned} \delta f(g) &= \delta f(g \cdot e) \\ &= {E_g}^*(\delta(f))(e) \\ &= \delta({E_g}^* f)(e) \\ &= (\delta f')(e), \end{aligned}$$

onde $f' = {E_g}^* f$. Por outro lado, considere $f_1, f_2 \in A(G)$ e $\mathsf{x} \in T_eG$. Para cada $g \in G$, defina

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{X}\colon & A(G) & \longrightarrow & A(G) \\ & f & \longmapsto & \mathsf{x}(f \circ E_-) \end{array}$$

Então

$$\begin{aligned} \mathsf{X}(f_1f_2)(g) &= \mathsf{x}((f_1f_2) \circ E_g) \\ &= \mathsf{x}({E_g}^*(f_1){E_g}^*(f_2)) \\ &= {E_g}^*f_1(e)\mathsf{x}({E_g}^*f_2) + \mathsf{x}({E_g}^*f_1){E_g}^*f_2(e) \\ &= f_1(g)(\mathsf{X}f_2(g)) + (\mathsf{X}f_1(g))f_2(g). \end{aligned}$$

Isso significa que $\mathsf{X}(f_1f_2) = f_1(\mathsf{X}f_2) + (\mathsf{X}f_1)f_2$. Além disso,

$$\begin{aligned} {E_g}^*(\mathsf{X}f)(h) &= \mathsf{X}f(gh) \\ &= \mathsf{x}({E_h}^*({E_g}^*f)) \\ &= \mathsf{X}({E_g}^*f)(h). \end{aligned}$$

Portanto ${E_g}^* \circ \mathsf{X} = \mathsf{X} \circ {E_g}^*$ e $\mathsf{X} \in \mathcal{L}(G)$.

Isso mostra que a função avaliação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_e\colon & \mathcal{L}(G) & \longrightarrow & T_eG \\ & \delta & \longmapsto & (\delta -)(e), \end{array}$$

ou seja a avaliação da derivação na identidade do grupo G, é a inversa da função convolução

$$\begin{array}{rccc} \colon & T_eG & \longrightarrow & \mathcal{L}(G) \\ & \mathsf{x} & \longmapsto & \mathsf{X}, \end{array}$$

construida acima. Por fim, vamos mostrar que a avaliação é um morfismo de álgebras de Lie. Dadas $d_1, d_2 \in \mathcal{L}(G)$ e $f \in A(G)$,

$$\begin{aligned} [d_1, d_2]f(e) &= d_1(d_2(f))(e) - d_2(d_1(f))(e) \\ &= (d_1 - (e))(d_2(f)) - (d_2 - (e))(d_1(f)), \end{aligned}$$

que é exatamente a expressão do colchete em T_eG. ■

Exemplo 2.31. Usando a descrição de certos anéis de coordenadas no Exemplo 2.11, vamos calcular alguns espaços tangentes.

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos calcular $T_0(\Bbbk^n) \simeq \Bbbk^n$. Primeiro, observe que uma derivação $d : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Bbbk$ é unicamente determinada pelo conjunto $\{d(x_1), \ldots, d(x_n)\} \subset \Bbbk$ (já que $d(\Bbbk) = 0$ e d segue a regra de Leibniz). Considere as derivadas direcionais

$$\begin{array}{rccc} \partial_i\colon & \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \Bbbk \\ & x_j & \longmapsto & \delta_{ij} \end{array}$$

e observe que o conjunto $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ é linearmente independente. Como a dimensão de $T_0(\Bbbk^n)$ é n (cf. Observação 2.27), já temos uma base para $T_0(\Bbbk^n)$.

Para calcular o colchete, vamos fixar a base $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ para $T_0\Bbbk^n$. Como todo elemento $\delta \in \mathcal{L}(\Bbbk^n)$ é da forma $E_{-*}d$ para algum $d \in T_0\Bbbk^n$, temos que calcular $E_{-*}\partial_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Dado $g = (g_1, \ldots, g_n) \in$

$\Bbbk^n$, temos $(E_{g*}\partial_i(x_j)) = (\partial_i(x_j \circ E_g))$. Então precisamos calcular $(x_j \circ E_g)$ em termos de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Dado $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \Bbbk^n$, temos $(x_j \circ E_g)(h) = x_j(g + h) = (g_j + h_j)$. Portanto $(x_j \circ E_g) = (x_j + g_j)$, para cada $g \in \Bbbk^n$. Então temos

$$\begin{aligned}(E_{g*}\partial_i(x_j)) &= (\partial_i(x_j \circ E_g)) \\ &= \partial_i(x_j + g_j) \\ &= \partial_i(x_j) + \partial_i(g_j) \\ &= \delta_{ij} + 0.\end{aligned}$$

Com isso concluímos que $\mathcal{L}(G)$ é gerado por $\partial_1, \ldots, \partial_n : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Em termos de álgebra de Lie, temos

$$\begin{aligned}[\partial_i, \partial_j](x_k) &= \partial_i(\partial_j(x_k)) - \partial_j(\partial_i(x_k)) \\ &= \partial_i(\delta_{jk}) - \partial_j(\delta_{ik}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto $T_0(\Bbbk^n) \simeq \Bbbk^n$ como álgebra de Lie abeliana. Em particular, $T_0(G_a(\Bbbk)) \simeq \Bbbk$, munido do colchete trivial.

(2) Lembre que $A(\mathrm{GL}_n)$ é isomorfo a um quociente de $\Bbbk[\mathbb{A}^{n^2+1}]$. Considere as funções coordenadas

$$\begin{array}{rcl} x_{ij} \colon G & \longrightarrow & \Bbbk \\ A & \longmapsto & a_{ij} \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} x_0 \colon G & \longrightarrow & \Bbbk \\ A & \longmapsto & \det(A)^{-1}, \end{array}$$

que certamente geral $A(\mathrm{GL}_n)$. Uma derivação $d : A(\mathrm{GL}_n) \to \Bbbk$ é unicamente determinada pelo conjunto $\{d(x_0), d(x_{ij}) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$. Considere as derivadas direcionais definidas por

$$\begin{array}{rcl} \partial_{ij} \colon A(\mathrm{GL}_n) & \longrightarrow & \Bbbk \\ x_{k\ell} & \longmapsto & \delta_{ik}\delta_{j\ell}. \end{array}$$

Observe que o conjunto $\{\partial_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ é linearmente independente. Como $\dim(T_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{GL}_n)) = n^2$, temos de fato uma base.

Para calcular a estrutura de álgebra de Lie de $T_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{GL}_n)$, vamos novamente transferir o cálculo para $\mathcal{L}(G)$. Primeiro observe que $\{E_{-*}\partial_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ é uma base de $\mathcal{L}(G)$. Portanto precisamos primeiro calcular $E_{g*}\partial_{ij}$ para cada $i, j = 1, \ldots, n$ e $g \in G$. De fato, vamos mostrar que, $E_{g*}\partial_{ij} = \sum_{k=1}^n g_{ki}\partial_{kj}$ para cada $g \in G$. Para cada x_{ab} temos $E_{g*}\partial_{ij}(x_{ab}) = \partial_{ij}(x_{ab} \circ E_g)$. Então precisamos primeiro calcular $(x_{ab} \circ E_g)$ em termos do elementos do conjunto $\{x_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$.

$$\begin{aligned}(x_{ab} \circ E_g)(h) &= x_{ab}(gh) \\ &= \sum_{c=1}^n g_{ac}h_{cb}.\end{aligned}$$

Portanto $(x_{ab} \circ E_g) = \sum_{c=1}^n g_{ac}x_{cb}$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}E_{g*}\partial_{ij}(x_{ab}) &= \partial_{ij}(x_{ab} \circ E_g) \\ &= \partial_{ij}\left(\sum_{c=1}^n g_{ac}x_{cb}\right) \\ &= \sum_{c=1}^n g_{ac}\partial_{ij}(x_{cb}) \\ &= \sum_{c=1}^n g_{ac}\delta_{ic}\delta_{jb} \\ &= \delta_{jb}g_{ai}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} g_{ki}\partial_{kj}(x_{ab}) &= \sum_{k=1}^{n} g_{ki}\delta_{ka}\delta_{jb} \\ &= g_{ai}\delta_{jb}.\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $E_{-*}\partial_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}\partial_{kj}$ e finalmente podemos calcular $[(E_{-*}\partial_{ij}),(E_{-*}\partial_{k\ell})]$. Pela fórmula anterior, temos

$$\begin{aligned}[(E_{-*}\partial_{ij}),(E_{-*}\partial_{k\ell})] &= \left[\left(\sum_{a=1}^{n} x_{ai}\partial_{aj}\right),\left(\sum_{b=1}^{n} x_{bk}\partial_{b\ell}\right)\right] \\ &= \sum_{a,b=1}^{n} [x_{ai}\partial_{aj}, x_{bk}\partial_{b\ell}] \\ &= \sum_{a,b=1}^{n} (x_{ai}\partial_{aj}\circ x_{bk}\partial_{b\ell} - x_{bk}\partial_{b\ell}\circ x_{ai}\partial_{aj}).\end{aligned}$$

Então basta calcular $\sum_{a,b=1}^{n} x_{ai}\partial_{aj}\circ x_{bk}\partial_{b\ell}(x_{yz}) - \sum_{a,b=1}^{n} x_{bk}\partial_{b\ell}\circ x_{ai}\partial_{aj}(x_{yz})$, para cada $y,z = 1,\ldots,n$.

$$\begin{aligned}\sum_{a,b=1}^{n} x_{ai}\partial_{aj}\circ x_{bk}\partial_{b\ell}(x_{yz}) &= \sum_{a,b=1}^{n} x_{ai}\partial_{aj}(x_{bk}\delta_{by}\delta_{\ell z}) \\ &= \delta_{\ell z}\sum_{a=1}^{n} x_{ai}\partial_{aj}(x_{yk}) \\ &= \delta_{\ell z}\delta_{jk}x_{yi}.\end{aligned}$$

Para obter um elemento em $T_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{GL}_n)$, precisamos avaliar em id_n, de onde obtemos que $\delta_{\ell z}\delta_{jk}x_{yi}(\mathrm{id}_n) = \delta_{\ell z}\delta_{jk}\delta_{yi} = \delta_{jk}\partial_{i\ell}(yz)$. Analogamente $\sum_{a,b=1}^{n} x_{bk}\partial_{b\ell}\circ x_{ai}\partial_{aj}(x_{yz}) = \delta_{jz}\delta_{\ell i}x_{yk}$ e, avaliando em id_n, obtemos $\delta_{jz}\delta_{\ell i}x_{yk}(\mathrm{id}_n) = \delta_{jz}\delta_{\ell i}\delta_{yk} = \delta_{\ell i}\partial_{kj}(x_{yz})$.

Com isso, podemos calcular o colchete em $T_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{GL_n})$, concluindo que

$$[\partial_{ij},\partial_{k\ell}] = \delta_{jk}\partial_{i\ell} - \delta_{\ell i}\partial_{kj},$$

que é a fórmula do comutador de matrizes. Por isso concluímos que $T_e(\mathrm{GL}_n(\Bbbk)) \simeq \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$.

(3) Como $\mathrm{SL}_n(\Bbbk) \subset \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, temos que $T_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{SL}_n) \subset \mathfrak{gl}_n$. Além disso, $\dim T_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{SL}_n) = n^2 - 1$, já que $\mathrm{SL}_2(\Bbbk)$ ser definido pela condição $\det A = 1$. Como a derivada do determinante é o traço, $T_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{SL}_n)$ é formado pelas matrizes de traço zero em $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. A estrutura de colchete de Lie, que é induzida de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, segue do exemplo anterior. Portanto $T_{\mathrm{id}_n}(\mathrm{SL}_n(\Bbbk)) \simeq \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$.

3. Terceira aula

Nesta aula, nosso objetivo é apresentar as variedades bandeira e obter uma descrição destas em termos de certas representações de álgebras de Lie. Vamos ilustrar esta relação com detalhes para o caso em que $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ enquanto vamos apenas estabelecer alguns resultados para casos mais gerais.

3.1. **Exponenciação de Matrizes e ação de grupos.**

A aplicação exponencial permite obter um elemento no grupo de Lie a partir de um dado elemento em sua álgebra de Lie. No caso específico do grupo de matrizes, temos a seguinte definição.

Definição 3.1. A *exponencial* de um elemento $\mathsf{x} \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ é o elemento $\exp(\mathsf{x}) \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ dado por

$$\exp(\mathsf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathsf{x}^n}{n!} \tag{3.1}$$

Exemplo 3.2. Pela fórmula $\det(\exp(\mathrm{x})) = \exp(\mathrm{tr}(\mathrm{x}))$, concluímos que a exponencial de uma matriz com traço nulo é uma matriz de determinante 1. Em particular, observe que $\mathrm{SL}_2(\Bbbk)$ pode ser construído exponenciando matrizes em $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. De fato, variando $a, b \in \Bbbk$,

$$\begin{aligned} y(b) &= \exp\left(b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \\ x(a) &= \exp\left(a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

geram o grupo $\mathrm{SL}_2(\Bbbk)$.

Definição 3.3. Dados um grupo G de Lie e uma variedade M, uma ação de G em M é um morfismo de variedades $\alpha : G \times M \to M$. Em geral, denotamos $\alpha(g, p) = g \cdot p$. Neste caso, M é chamada de *G-espaço*.

Se X é um G-espaço e $x \in X$, defina a *órbita de x* pela ação de G como o conjunto $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$. O *subgrupo de isotropia em x*, denotado por G_x, é definido como o subgrupo que consiste dos elementos de G que fixam x, isto é $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$.

Observação 3.4. Vamos relembrar a construção do quociente de um grupo por um subgrupo. Dado um grupo G e um subgrupo $H \subseteq G$, o quociente G/H é o conjunto de classes de equivalência da relação de equivalência em G: $g_1 \sim g_2$ se, e somente se, $g_1 = g_2 h$, para algum $h \in H$. Então as classes de equivalência, ou seja os elementos de G/H, são denotados por gH, $g \in G$.

Se H, G forem variedades, podemos considerar a seguinte topologia no quociente G/H. Primeiro considere o morfismo quociente $\pi : G \to G/H$. Os abertos $U \subset G/H$ são tais que $\pi^{-1}(U) \subset G$ são abertos. Se G for um grupo de Lie e H for um subgrupo fechado, o quociente admite uma estrutura de variedade (cf. [Lee03, Theorem 7.15] e [Hum75, §12]).

Proposição 3.5. Sejam G um grupo de Lie e M um G-espaço. Então, para cada $x \in M$, G_x é um subgrupo fechado e a função

$$\begin{aligned} F\colon G/G_x &\longrightarrow G \cdot x \\ gG_x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. [Lee03, Theorem 7.19] ∎

3.2. **Variedades Projetivas.**

Definição 3.6. Seja V um $\Bbbk$-espaço vetorial. O *espaço projetivo* $\mathbb{P}(V)$ é um espaço topológico consistindo de retas passando pela origem de V. Se $\dim V = (d+1)$, vamos denotar $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^d$ e um ponto $\ell \in \mathbb{P}^d$ por qualquer um dos pontos $[x_0 : x_1 : \cdots : x_d] \in \ell \setminus \{0\}$.

Um subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ é uma *variedade projetiva*, se existe uma família de polinômios homogêneos $p_1, \ldots, p_k \in \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$ tais que $X = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}(V) \mid p_i(x_0, \cdots, x_n) = 0, \forall\, i = 1, \ldots, k\}$.

Exemplo 3.7.

(1) Todo espaço projetivo é uma variedade projetiva, já que o polinômio $p = 0$ é homogêneo. Em particular, $\mathbb{P}^1$ pode ser imaginado da seguinte forma. Começamos com $\mathbb{R}^2$ e consideramos as retas passando pela origem: Em geral, podemos pensar indutivamente em $\mathbb{P}^n$ como uma metade da esfera S^n, com o meridiano S^{n-1} indentificado como um $\mathbb{P}^{n-1}$.

(2) Para todo $n \geq 0$, podemos identificar $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \iota \colon \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^{n+1} \\ [a_0 : \cdots : a_n] &\longmapsto [a_0 : \cdots : a_n : 0]. \end{aligned}$$

(3) Considere $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p_\lambda(x_0, x_1) = x_0 - \lambda x_1$ um polinômio homogêneo. O conjunto

$$\{\ell \in \mathbb{P}(V) \mid p(\ell) = 0\} = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 = \lambda x_1\}.$$

Ou seja, todo ponto em $\mathbb{P}^1$ é uma variedade projetiva fechada. Usando a inclusão do item anterior, mostramos que esse fato vale em geral: todo ponto em $\mathbb{P}^n$ é fechado.

Definição 3.8. Dado um espaço vetorial V de dimensão n, seja $d = (d_1, \ldots, d_k)$ uma sequência de inteiros satisfazendo $0 < d_1 < \cdots < d_k < n$. Uma *bandeira* em V é uma cadeia

$$(0) = V_0 \subset V_{d_1} \subset \cdots \subset V_{d_k} \subset V,$$

onde $V_{d_i} \subseteq V$ é um subespaço vetorial, para todo $i = 1, \ldots, k$. Se $k = n$ e $\dim V_{d_i} = d_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então a bandeira é chamada de *completa*. O conjunto formado por todas as bandeiras em V será chamado de *espaço de bandeiras* de V.

O espaço de bandeiras é uma variedade projetiva. Esse resultado será mostrado, em um contexto um pouco diferente, na próxima seção. Além de outros conceitos, ele está relacionado a imersão de Plücker (cf. [Hum75, §1.8]), que realiza explicitamente as variedades Grassmannianas como subvariedades de um espaço projetivo.

3.3. **Teorema principal e generalizações.**

Teorema 3.9. Sejam $G = \mathrm{SL}_2(\Bbbk)$ e $B \subset G$ o subgrupo de matrizes triangulares superiores (com diagonal). A variedade G/B é uma variedade projetiva.

Demonstração. Primeiro lembre que G/B é uma variedade (cf. Observação 3.4). Agora vamos identificar G/B com $\mathbb{P}(V)$, onde V é uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. Considere $V = L(1)$ (cf. Teorema 1.37). Vamos definir uma representação de G em V. Para isso, basta definir a representação nos geradores de G. Lembre que $L(1)$ é 2-dimensional e tem uma base $\{e_0, e_1\}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \mathsf{y}e_0 &= e_1 & \mathsf{y}e_1 &= 0 \\ \mathsf{x}e_0 &= 0 & \mathsf{x}e_1 &= e_0. \end{aligned}$$

Então definimos

$$\begin{aligned} x(a)e_0 &= e_0 \\ x(a)e_1 &= e_1 + ae_0 \\ y(b)e_0 &= e_0 + be_1 \\ y(b)e_1 &= e_1 \end{aligned}$$

de modo que a matriz de $x(a)$ na base $\{e_0, e_1\}$ é $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e a matriz de $y(b)$ na base $\{e_0, e_1\}$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Com isso, temos uma representação de $\mathrm{SL}_2(\Bbbk)$, que induz uma ação de $\mathrm{SL}_2(\Bbbk)$ em $\mathbb{P}(L(1))$, pois essa representação é linear.

Agora observe que a órbita da linha $\ell_0 = \Bbbk e_0$ sob ação de B é ℓ_0. Ou seja ℓ_0 é um ponto fixo da ação de B e B está no subgrupo de isotropia de ℓ_0. Além disto, toda matriz que fixa ℓ_0 é triangular superior em G. Portanto, B é o subgrupo de isotropia de ℓ_0. Note também que a órbita de ℓ_0 por todo grupo G é $\mathbb{P}(V)$. De fato, todo vetor

$(a, c) \in \mathbb{P}(L(1))$ pode ser obtido pela ação da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em ℓ_0. Finalmente, pela Proposição 3.5, concluimos que $G/B \simeq \mathbb{P}(L(1))$, e que G/B é, de fato, uma variedade projetiva. ■

Observe que é possível identificar G/B com o espaço de bandeiras completas em $L(1)$. De fato, uma bandeira completa em um espaço 2-dimensional é o mesmo que uma escolha de um subespaço unidimensional, ou seja uma linha em $L(1)$ ou um ponto em $\mathbb{P}(L(1))$. Como

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & (ay + cx^{-1}) \\ bx & (by + dx^{-1}) \end{pmatrix},$$

um ponto $[a : b] \in \mathbb{P}(L(1))$ pode ser identificado com a classe lateral $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{k})/B$.

Agora vamos estabelecer algumas generalizações. Considere $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{k})$ cuja álgebra de Lie é dada por $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$. Vamos relembrar a seguinte generalização do teorema de representação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ enunciado ao final da primeira aula: " Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semissimples complexa, existe um subconjunto $P^+ \subset \mathfrak{h}^*$ tal que, para cada $\lambda \in P^+$, existe uma única representação irredutível $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(L(\lambda))$".

Observação 3.10. Como o resultado acima é valido para uma álgebra de Lie semissimples complexa, vamos considerar $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Entretanto, vale ressaltar que o resultado acima pode também ser estabelecido para $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ sob certas condições. O caso mais imediato se dá no contexto de formas reais normais $\mathfrak{g}_0$, isto é, aquelas em que o posto da álgebra abeliana $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ coincide com o posto da subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ do complexificado de $\mathfrak{g}_0$. O caso geral pode ser encontrado em [GJT98].

(1) B: o subgrupo das matrizes triangulares superiores.
- Considere a ação canônica de G em $\mathbb{k}^{n+1}$. Se $\{e_0, \ldots, e_n\}$ for uma base para $\mathbb{k}^{n+1}$ então a órbita da linha $\ell_0 = \mathbb{k}e_0$ é ℓ_0, a órbita do subespaço ℓ_1 gerado por e_0 e e_1, isto é, $\ell_1 = \mathbb{k}e_0 \oplus \mathbb{k}e_1$ é ℓ_1 e, assim por diante, a órbita do subespaço ℓ_k gerado por $e_0, \ldots, e_k$ é ℓ_k. Portanto, B é o subgrupo de isotropia da variedade bandeira formada pelos vetores básicos. Como a variedade bandeira completa pode ser obtida pela ação de G na bandeira formada pelos vetores básicos segue que, pela Proposição 3.5, G/B se indentifica a uma variedade bandeira completa.
- Por outro lado, pelo teorema da representação de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$, é possível identificar G/B a uma órbita fechada no espaço $\mathbb{P}(L(\lambda))$, para algum $\lambda \in P^+$.

Desta forma, juntando estas duas identificações, a variedade bandeira completa pode ser vista como uma variedade projetiva.

(2) P (em vez de B): o subgrupo das matrizes triangulares superiores em blocos. Vamos supor que sejam dois blocos de tamanhos k e $(n + 1 - k)$.
- Assim como feito acima, obtém-se P como o subgrupo de isotropia da variedade bandeira formada pelos k primeiros vetores básicos de modo que G/P se identifica a variedade bandeira formada pelos subespaços k-dimensionais em $\mathbb{k}^{n+1}$, que é a conhecida variedade Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(n)$.
- Por outro lado, existe um $\mu_k \in P^+$ e uma representação irredutível $L(\mu_k)$ da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ tal que G/P é uma órbita fechada em $\mathbb{P}(L(\mu_k))$. Neste caso, obtém-se explicitamente que $L(\mu_k) = \bigwedge^k \mathbb{k}^{n+1}$ (cf. [San10, Capítulo 11]).

Desta forma, a variedade bandeira $\mathrm{Gr}_k(n)$ se identifica a uma órbita em $\mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{k}^{n+1})$. Esta representação de $\mathrm{Gr}_k(n)$ é conhecida como *mergulho de Plücker*.

Referências

[GJT98] Guivarc'h, Y., Ji, L., Taylor, J. C., *Compactifications of Symmetric Spaces*. Birkhäuser, Progr. Math. 156 (1998).

[Her64] Herstein, I. N. *Topics in algebra*. Second edition. Xerox College Publishing, Lexington, Mass.-Toronto, Ont., 1975. xi+388 pp.

[Hum75] Humphreys, J. E. *Linear algebraic groups*. Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. xiv+247 pp.

[Hum78] Humphreys, J. E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York, 1978.

[Hum90] Humphreys, J. E. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xii+204 pp.

[Lee03] Lee, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013. xvi+708 pp.

[San10] San Martin, L.A.B. *Algebras de Lie*. Second Edition. Ed. Unicamp, 2010.